I Открытая олимпиада по математике в школе 1543
7 класс. Решения.

$\boxed{\mathbf{1}}$ За круглым столом сидят болельщики «Спартака» и «Динамо». Каждый из сидящих сказал соседу справа: «Я и мой сосед слева болеем за разные команды». Известно, что болельщики говорят правду своим и лгут чужим. Сколько их могло быть, если известно что их не больше 30 и не меньше 25?

Решение: Рассмотрим каких-то трёх людей А, Б, В, сидящих подряд. Если Б и А болеют за разные команды, то Б сказал правду, а значит Б и В болеют за одинаковые команды. А если Б и А болеют за одну команду, то Б соврал, и они с В болеют за разные команды. Значит, у каждого человека один сосед болеет за ту же команду, что и он, а другой — за другую.

Получается, что болельщики сидят в таком порядке: ...ССДДССДД... Чтобы круг замкнулся, число болельщиков должно делиться на 4, следовательно их 28.

$\boxed{\mathbf{2}}$ На доске написано

$$512 : (256 : (128 : (64 : (32 : (16 : (8 : (4 : 2))))))) = 2.$$

Заменив как можно меньше знаков деления на знаки умножения, сделайте это равенство верным.

Решение: Можно заменить всего один знак:

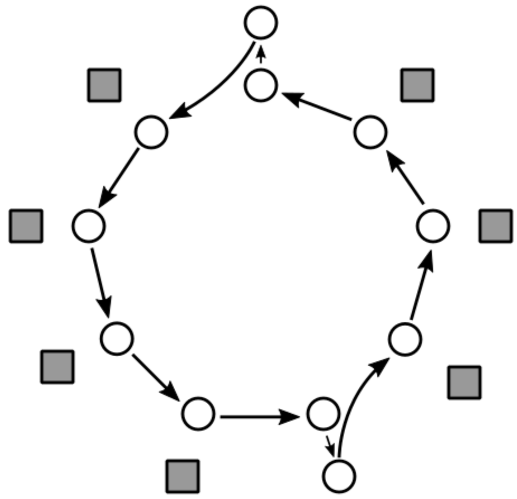
$$512 : (256 : (128 : (64 : (32 : (16 \times (8 : (4 : 2))))))) = 2.$$

Очевидно, что это минимум.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На занятие по бальным танцам пришли 11 девочек и 7 мальчиков. Учитель разбил их на пары и поставил по кругу для первого танца, двум девочкам пришлось танцевать за кавалера. Чтобы партнёры менялись, учитель придумал такую схему: после каждого танца обе девочки-«кавалера» меняются ролями со своей дамой, а затем все дамы переходят к следующему по часовой стрелке кавалеру.

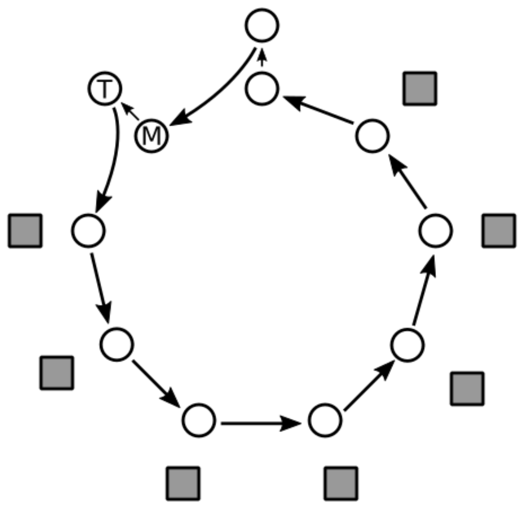
Первый танец Маша и Таня танцевали вместе. Какое наибольшее число танцев может пройти, прежде чем они вновь станцуют друг с другом?

Решение: Схематично изобразим происходящее: пусть серые квадраты — мальчики, а белые круги — девочки. Во внешнем круге стоят «кавалеры», а во внутреннем – дамы.



Мальчики стоят неподвижно, а девочки перемещаются по кругу вдоль стрелок, не меняя порядка. Действительно, если девочка танцевала с мальчиком, то она просто переходит к следующему кавалеру. Если девочка танцевала в роли «дамы» с другой девочкой, то на следующем танце она заменяет ее на месте кавалера. А девочка-«кавалер» становится дамой у следующего кавалера.

Если Маша и Таня танцевали друг с другом, то в этом кругу из девочек они стоят рядом (будем считать, что Таня первая, и, значит, танцевала за кавалера). В следующий раз они станцуют друг с другом, когда Таня придёт в следующий промежуток между мальчиками. Чтобы этот случилось как можно позже, Таня по дороге от одного промежутка до другого должна станцевать со всеми 7 мальчиками.



Соответственно, Таня станцует с Машей, потом с 7 мальчиками, потом в роли дамы с девочкой перед собой и, наконец, опять станцует с Машей в роли кавалера. Итого, второй раз Таня станцует с Машей, самое позднее, на 10 танце.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Есть 40 монет, одна из них фальшивая (она легче настоящей) и чашечные весы с монетоприёмником. Перед каждым взвешиванием нужно опустить в монетоприёмник одну из монет. Если монета была настоящая, то весы покажут правдивый результат взвешивания. А если фальшивая, то они могут показать что угодно. Как найти 36 настоящих монет, чтобы расплатиться ими на рынке? (Монеты, уже опущенные в весы, обратно не вытряхиваются.)

Решение: Для решения достаточно считать, что на каждом шагу мы платим настоящей монетой, и показания весов верные. Действительно, если мы на каком-то шагу заплатили фальшивой монетой, то у нас остались только настоящие, и любые 36 монет, которые мы каким-либо образом выделим, нам подойдут.

Будем называть **подозрительными** монеты, про которые точно не ясно, настоящие ли они.

Заплатим одну монету, и взвесим по 13 монет на каждой из чаш. Если какая-то из чаш перевесила, то фальшивая монета на более легкой чаше. Если же весы в равновесии, то фальшивая монета находится среди 13 оставшихся. Итак, мы выделили 13 подозрительных монет, а оставшиеся 26 точно настоящие.

Заплатим одной из 13 подозрительных монет и взвесим по 4 подозрительные монеты на каждой из чаш (еще 4 отложим в сторону). Аналогично предыдущему взвешиванию, после этого только 4 монеты останутся подозрительными, а про остальные 8 станет понятно, что они настоящие.

Наконец, заплатим одной из четырех подозрительных монет, взвесим по одной подозрительной монете на каждой из чаш, и найдем фальшивую и две настоящие. Итого мы нашли $26+8+2=36$ настоящих монет.

$\boxed{5}$ В стране несколько городов, в каждом живёт сколько-то жителей. Между двумя городами есть дорога, если количества жителей в этих городах имеют общий делитель, больший 1. Оказалось, что сумма величин, обратных к количествам жителей во всех городах, равна 1. Докажите, что из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого.

Решение: Предположим противное: пусть города можно поделить на две группы, между которыми нет никаких дорог. Пусть в городах первой группы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ жителей, а в городах второй группы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ жителей. Из условия следует, что НОД$(a_i, b_j) = 1$ для любых i, j. Следовательно, произведения $a_1a_2 \ldots a_n$ и $b_1b_2 \ldots b_m$ взаимно просты.

Обозначим

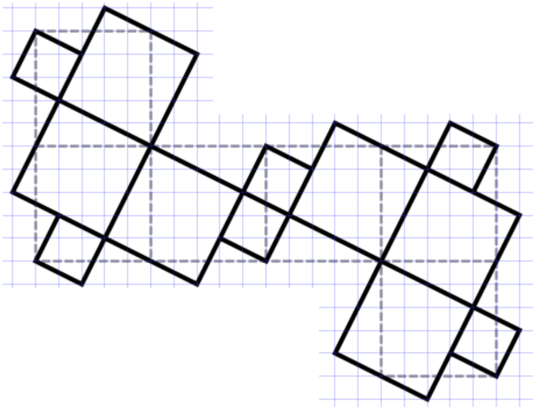
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{x}{A}; \qquad \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=\frac{y}{B},$$

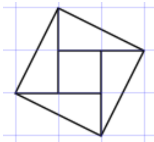
где дроби $\frac{x}{A}$ и $\frac{y}{B}$ несократимые. Число A — это делитель $a_1a_2 \ldots a_n$, а число B — делитель $b_1b_2 \ldots b_m$. Значит, A и B тоже взаимно просты.

По условию, $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=\frac{xB+yA}{AB}=1$, значит $AB=xB+yA$ и $xB=AB-yA$. Поскольку x и B взаимно просты с A, то левая половина равенства не делится на A, а правая — делится, противоречие.

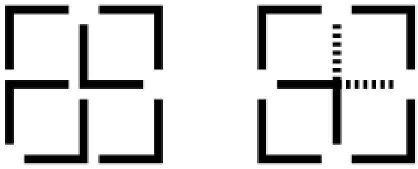
$\boxed{6}$ У Стёпы есть кубик с ребром 5 см. Он захотел оклеить его бумагой и попросил младшую сестру Полину вырезать ему из клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1 см) шесть квадратов площади 25 см^2. Полина немного перепутала задание и вырезала шесть квадратов площади 20 см^2 и ещё шесть квадратов площади 5 см^2. Сможет ли теперь Стёпа оклеить свой куб? (Квадраты можно перегибать через ребро куба, но нельзя разрезать на части.)

Решение: Сможет. Вот один из примеров, как из Полининых квадратов можно склеить развертку куба. Показать, что площадь маленького квадрата равна 5, можно, разбив его на 4 треугольника и квадрат площади 1. Большой квадрат разбивается на 4 маленьких, поэтому его площадь равна 20.





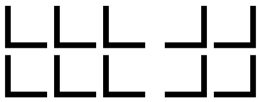
$\boxed{7}$ Есть металлическая решетка в виде квадрата 5×5. Назовем **уголком** два металлических прута единичной длины, соединённых под прямым углом. Сколькими способами можно разрезать решетку на уголки так, чтобы вершины всех уголков находились в разных точках? На рисунке слева показан пример, как можно разрезать на уголки решётку 2×2, а справа — как нельзя.



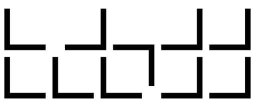
Решение:

Посмотрим на нижний ряд уголков. Сначала там идет несколько (возможно 0) уголков, смотрящих вправо, а потом идут уголки, смотрящие влево. Назовем место перехода от правых уголков к левым **провалом**.

Всего есть 6 вариантов, как может быть устроена нижняя строка (в зависимости от местоположения провала). Теперь посмотрим на вторую строку снизу. Там тоже несколько уголков смотрят вправо, потом идет провал, а потом оставшиеся уголки смотрят влево. Заметим, что провал не может располагаться точно над предыдущим:



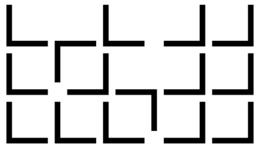
Зато может располагаться в любом другом месте:



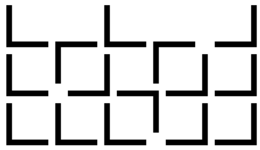
Уголки до провала смотрят вправо, уголки после провала смотрят влево. Уголок над провалом в нижней строке смотрит вниз, а остальные смотрят вверх.

Соответственно, для каждого варианта нижней строки есть 5 вариантов расположения уголков во второй снизу строке.

Теперь посмотрим на третью снизу строку. Там происходит все то же самое: несколько уголков, смотрящих вправо, провал, несколько уголков, смотрящих влево. Причем провал не может располагаться над одним из двух предыдущих провалов:



а в любом другом месте может:



Уголки до провала смотрят вправо, уголки после провала — влево, уголки, расположенные над одним из предыдущих провалов смотрят вниз, а остальные уголки смотрят вверх.

Итак, у нас есть 4 варианта для третьей снизу строки.

И так далее: для следующей строки есть 3 варианта, а потом 2.

Для верхней строки есть единственный вариант: провал расположен в том единственном столбце, где раньше провалов не было. Все уголки расположены над предыдущими провалами и поэтому смотрят вниз (и, таким образом, не выходят за край доски).

Получается $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ вариантов разбиения.