I Открытая олимпиада по математике в школе 1543

6 класс. Решения.

$\boxed{\mathbf{1}}$ За круглым столом сидят болельщики «Спартака» и «Динамо». Каждый из сидящих сказал соседу справа: «Я и мой сосед слева болеем за разные команды». Известно, что болельщики говорят правду своим и лгут чужим. Сколько их могло быть, если известно что их не больше 30 и не меньше 25?

Решение: Рассмотрим каких-то трёх людей А, Б, В, сидящих подряд. Если Б и А болеют за разные команды, то Б сказал правду, а значит Б и В болеют за одинаковые команды. А если Б и А болеют за одну команду, то Б соврал, и они с В болеют за разные команды. Значит, у каждого человека один сосед болеет за ту же команду, что и он, а другой — за другую.

Получается, что болельщики сидят в таком порядке: ...ССДДССДД... Чтобы круг замкнулся, число болельщиков должно делиться на 4, следовательно их 28.

$\boxed{\mathbf{2}}$ На доске написано

$$512 : (256 : (128 : (64 : (32 : (16 : (8 : (4 : 2))))))) = 2.$$

Заменив как можно меньше знаков деления на знаки умножения, сделайте это равенство верным.

Решение: Можно заменить всего один знак:

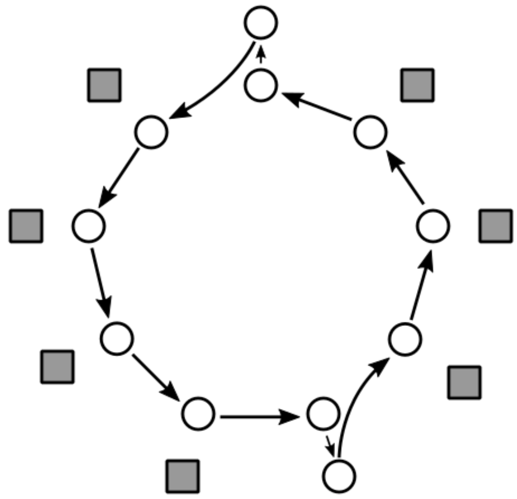
$$512 : (256 : (128 : (64 : (32 : (16 \times (8 : (4 : 2))))))) = 2.$$

Очевидно, что это минимум.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На занятие по бальным танцам пришли 11 девочек и 7 мальчиков. Учитель разбил их на пары и поставил по кругу для первого танца, двум девочкам пришлось танцевать за кавалера. Чтобы партнёры менялись, учитель придумал такую схему: после каждого танца обе девочки-«кавалера» меняются ролями со своей дамой, а затем все дамы переходят к следующему по часовой стрелке кавалеру.

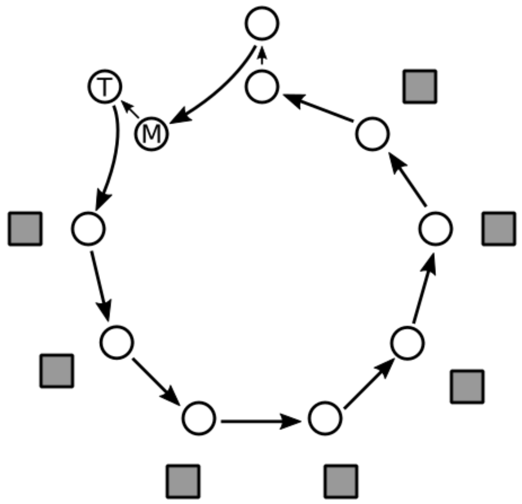
Первый танец Маша и Таня танцевали вместе. Какое наибольшее число танцев может пройти, прежде чем они вновь станцуют друг с другом?

Решение: Схематично изобразим происходящее: пусть серые квадраты — мальчики, а белые круги — девочки. Во внешнем круге стоят «кавалеры», а во внутреннем – дамы.



Мальчики стоят неподвижно, а девочки перемещаются по кругу вдоль стрелок, не меняя порядка. Действительно, если девочка танцевала с мальчиком, то она просто переходит к следующему кавалеру. Если девочка танцевала в роли «дамы» с другой девочкой, то на следующем танце она заменяет ее на месте кавалера. А девочка-«кавалер» становится дамой у следующего кавалера.

Если Маша и Таня танцевали друг с другом, то в этом кругу из девочек они стоят рядом (будем считать, что Таня первая, и, значит, танцевала за кавалера). В следующий раз они станцуют друг с другом, когда Таня придёт в следующий промежуток между мальчиками. Чтобы этот случилось как можно позже, Таня по дороге от одного промежутка до другого должна станцевать со всеми 7 мальчиками.



Соответственно, Таня станцует с Машей, потом с 7 мальчиками, потом в роли дамы с девочкой перед собой и, наконец, опять станцует с Машей в роли кавалера. Итого, второй раз Таня станцует с Машей, самое позднее, на 10 танце.

$\boxed{4}$ Используя цифры от 1 до 9 по одному разу, составили несколько простых чисел. Какая минимальная сумма может быть у этих чисел?

<u>Решение:</u> Цифры 4, 6 и 8 не могут быть у простых чисел в разряде единиц, поэтому сумма не меньше, чем $40+60+80+1+2+3+5+7+9=207$. Пример (не единственный): $41+67+89+2+3+5=207$.

$\boxed{5}$ Есть 40 монет, одна из них фальшивая (она легче настоящей) и чашечные весы с монетоприёмником. Перед каждым взвешиванием нужно опустить в монетоприёмник одну из монет. Если монета была настоящая, то весы покажут правдивый результат взвешивания. А если фальшивая, то они могут показать что угодно. Как найти 36 настоящих монет, чтобы расплатиться ими на рынке? (Монеты, уже опущенные в весы, обратно не вытряхиваются.)

Решение: Для решения достаточно считать, что на каждом шагу мы платим настоящей монетой, и показания весов верные. Действительно, если мы на каком-то шагу заплатили фальшивой монетой, то у нас остались только настоящие, и любые 36 монет, которые мы каким-либо образом выделим, нам подойдут.

Будем называть **подозрительными** монеты, про которые точно не ясно, настоящие ли они.

Заплатим одну монету, и взвесим по 13 монет на каждой из чаш. Если какая-то из чаш перевесила, то фальшивая монета на более легкой чаше. Если же весы в равновесии, то фальшивая монета находится среди 13 оставшихся. Итак, мы выделили 13 подозрительных монет, а оставшиеся 26 точно настоящие.

Заплатим одной из 13 подозрительных монет и взвесим по 4 подозрительные монеты на каждой из чаш (еще 4 отложим в сторону). Аналогично предыдущему взвешиванию, после этого только 4 монеты останутся подозрительными, а про остальные 8 станет понятно, что они настоящие.

Наконец, заплатим одной из четырех подозрительных монет, взвесим по одной подозрительной монете на каждой из чаш, и найдем фальшивую и две настоящие. Итого мы нашли $26+8+2=36$ настоящих монет.

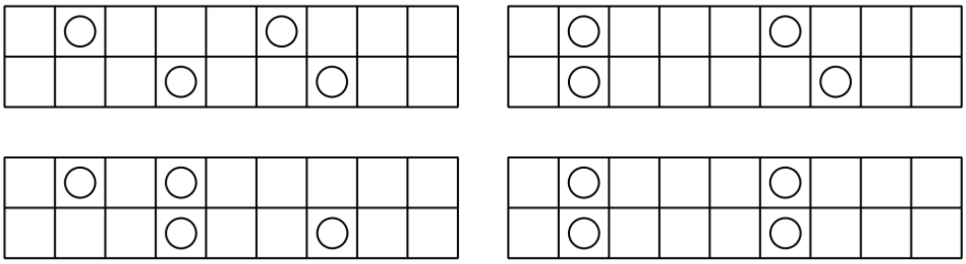
$\boxed{\mathbf{6}}$ Какое наибольшее число шахматных ладей можно расставить на доске 9×9 так, чтобы для любых двух ладей была какая-то пустая клетка, которую они обе бьют? (Ладьи не умеют прыгать через другие ладьи.)

Решение: Если в какой-то строке хотя бы три ладьи, то у двух крайних нет общей пустой клетки, которую они бьют. Значит, в каждой строке не больше двух ладей.

Посмотрим на две какие-то строки, в которых находится по две ладьи (на рисунках эти строки изображены соседними, но вообще это не обязательно). Есть несколько вариантов для их расположения:

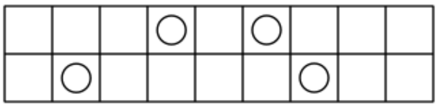
- Все 4 ладьи на разных вертикалях, самая левая и самая правая ладья в разных строках.
- Две левые (или две правые) ладьи на одной вертикали, две другие – на разных.
- Левая ладья в одной строке и правая в другой находятся на одной вертикали.

- Ладьи образуют прямоугольник.



Как можно видеть из рисунков, эти четыре случая не подходят под условие: у верхней левой и нижней правой ладей нет пустой клетки, которую они обе бьют.

- Все 4 ладьи на разных вертикалях, самая левая и самая правая ладьи в одной строке:

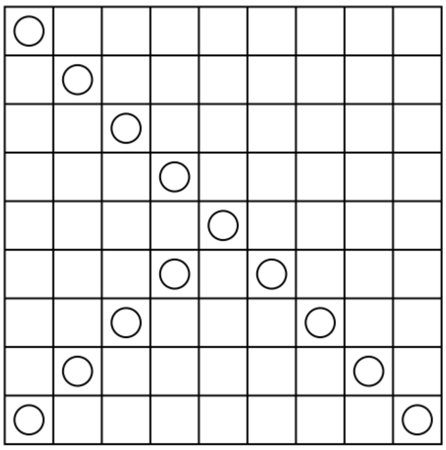


Это единственный подходящий вариант.

Любые две строки с двумя ладьями устроены именно так: ладьи в одной строке расположены «между» ладьями в другой строке. Поэтому больше четырех строк с двумя ладьями быть не может: ладьи просто не влезут.

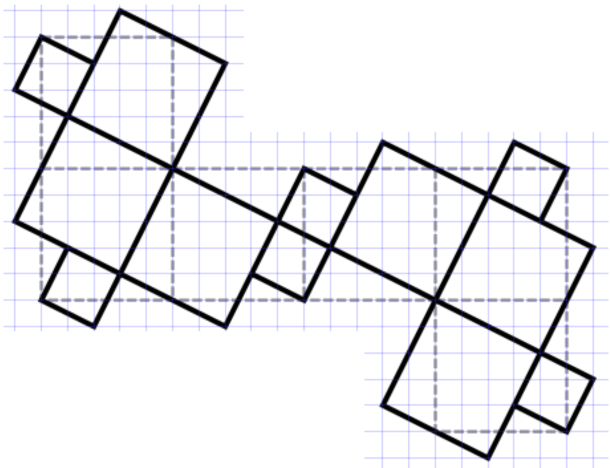
Эту оценку можно сделать и чуть проще. Если у нас есть 5 строк, в каждой из которых по 2 ладьи, то какие-то две из этих 10 ладей находятся на одной вертикали. Но такого быть не может (см. картинки выше).

Итого у нас не больше 4 строк с двумя ладьями, а в оставшихся 5 строках максимум по одной ладье. Получается, что ладей не больше 13. Приведем пример на 13 ладей:

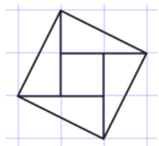


$\boxed{\textbf{7}}$ У Стёпы есть кубик с ребром 5 см. Он захотел оклеить его бумагой и попросил младшую сестру Полину вырезать ему из клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1 см) шесть квадратов площади 25 см^2. Полина немного перепутала задание и вырезала шесть квадратов площади 20 см^2 и ещё шесть квадратов площади 5 см^2. Сможет ли теперь Стёпа оклеить свой куб? (Квадраты можно перегибать через ребро куба, но нельзя разрезать на части.)

<u>Решение:</u> Сможет. Вот один из примеров, как из Полининых квадратов можно склеить развертку куба.



Показать, что площадь маленького квадрата равна 5, можно, разбив его на 4 треугольника и квадрат площади 1.



Большой квадрат разбивается на 4 маленьких, поэтому его площадь равна 20.